

CONTRÔLE INDIRECT DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS D'ONDES SEMILINÉAIRES COUPLÉES

Christophe Zhang

Laboratoire Jacques-Louis Lions

Forschungsinstitut für Mathematik - ETH Zürich

Article : *Internal control of systems of semilinear coupled 1-D wave equations*

Déposé sur HAL et ArXiv.

- $L > 0, 0 < a < b < L,$

$$\left\{ \begin{array}{l} \square_{\nu_1} u = f_1(u, v) + h, \quad x \in [0, L], \\ \square_{\nu_2} v = f_2(u, v), \quad x \in [0, L], \\ u = 0 \text{ sur } \{0, L\}, \\ v = 0 \text{ sur } \{0, L\}, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

- $L > 0, 0 < a < b < L,$

$$\begin{cases} \square_{\nu_1} u = f_1(u, v) + h, & x \in [0, L], \\ \square_{\nu_2} v = f_2(u, v), & x \in [0, L], \\ u = 0 \text{ sur } \{0, L\}, \\ v = 0 \text{ sur } \{0, L\}, \end{cases} \quad (1.1)$$

- $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2), f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0, \nu_1, \nu_2 \neq 0.$

- $L > 0$, $0 < a < b < L$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \square_{\nu_1} u = f_1(u, v) + h, \quad x \in [0, L], \\ \square_{\nu_2} v = f_2(u, v), \quad x \in [0, L], \\ u = 0 \text{ sur } \{0, L\}, \\ v = 0 \text{ sur } \{0, L\}, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

- $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$, $\nu_1, \nu_2 \neq 0$.
- Solutions C^k , $k \geq 2$, et $\text{supp } h \subset [0, T] \times [a, b]$.
→ Conditions de compatibilités aux coins.

Contrôlabilité

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{cases} \square_{\nu_1} u = f_1(u, v) + h \\ \square_{\nu_2} v = f_2(u, v) \end{cases}} \begin{pmatrix} u_0^f \\ u_1^f \\ v_0^f \\ v_1^f \end{pmatrix}$$

Sommaire

- 1 La méthode des contrôles fictifs
- 2 Premier cas : couplage non-dégénéré
- 3 Second cas : un exemple de couplage dégénéré

La méthode générale

Idée : 2 puis 1.

- 2 contrôles : "classique". HUM ou par les caractéristiques (systèmes hyperboliques).
- 1 contrôle : par un théorème de point fixe / inversion (Schauder, Kakutani, Nash-Moser...).

Palmarès :

- Systèmes de dimension finie (Coron)
- Équations de la chaleur couplées (Burgos-Garcia, Coron-Guerrero-Rosier, Coron-Guilleron)
- Systèmes hyperboliques d'ordre 1 (Alabau-Coron-Olive)
- Navier-Stokes (Coron-Guerrero, Coron-Lissy)
- Schoedinger/Ondes lin'aires (Liard-Lissy)

Formulation avec des opérateurs différentiels

Soit \mathcal{D} l'opérateur différentiel associé à l'EDP de notre système de contrôle :

$$\mathcal{D}(u, v, h) = (\square_{\nu_1} u - f_1(u, v) - h, \square_{\nu_2} v - f_2(u, v)).$$

Problème de contrôle : trouver (u, v) avec les bonnes conditions initiales et finales et un contrôle h tels que

$$\mathcal{D}(u, v, h) = (0, 0).$$

Un exemple linéaire

Soit \mathcal{D} un opérateur différentiel linéaire associé à un problème de contrôle. On peut construire (u, v) tels que pour un petit $\eta > 0$,

$$(h_1, h_2) := \mathcal{D}(u, v, 0) = 0, \forall t \notin [\eta, T-\eta] \quad (\text{système avec 2 contrôles!})$$

\mathcal{D} inversible (on élimine les contrôles) :

$$\mathcal{D} \left((u, v, 0) + \mathcal{D}^{-1}(-h_1, -h_2) \right) = (h_1, h_2) - (h_1, h_2) = 0.$$

→ $(u, v, 0) + \mathcal{D}^{-1}(-h_1, -h_2)$ solution?

Conditions initiales et finales?

La résolution algébrique

Propriété supplémentaire : \mathcal{D} est algébriquement résoluble, ie \mathcal{D}^{-1} est aussi un opérateur différentiel linéaire. Or,

$$(h_1, h_2) = 0, \forall t \notin [\eta, T - \eta]$$

donc

$$\mathcal{D}^{-1}(-h_1, -h_2) = 0, \forall t \notin [\eta, T - \eta].$$

$(u, v, 0) + \mathcal{D}^{-1}(-h_1, -h_2)$ a les bonnes conditions initiales et finales!

La version non-linéaire

Théorème d'inversion locale, obtenu par une méthode de Nash-Moser :

Théorème (Gromov, *Partial Differential Relations*, 1986)

Si la différentielle d'un opérateur différentiel est algébriquement résoluble partout sur une relation différentielle ouverte, alors cet opérateur est partout localement inversible et les inverses locaux sont tous des opérateurs différentiels compatibles entre eux.

Notion de compatibilité : \mathcal{D}_1^{-1} et \mathcal{D}_2^{-1} deux inverses locaux. $f = g$ au voisinage de x .

$$\mathcal{D}_1^{-1}(f)(x) = \mathcal{D}_2^{-1}(g)(x).$$

cf. propriété des opérateurs linéaires!

Récapitulatif

Méthode des contrôles fictifs pour les opérateurs différentiels

1 2 contrôles

Résoudre le problème avec deux contrôles h_1, h_2

$$\mathcal{D}(u, v, 0) = (h_1, h_2)$$

Bonnes conditions initiales et finales, trop de contrôles.

2 Corriger l'approximation

Résolution algébrique, inversion de Gromov.

Garder conditions initiales et finales : travail localisé en temps, et autour de $\text{supp}(h_1, h_2)$,

Sommaire

- 1 La méthode des contrôles fictifs
- 2 Premier cas : couplage non-dégénéré
- 3 Second cas : un exemple de couplage dégénéré

Implémentation sur notre système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{tt}u - \nu_1^2 u_{xx} = f_1(u, v) + h_1, \quad x \in [0, L], \\ \partial_{tt}v - \nu_2^2 v_{xx} = f_2(u, v) + h_2, \quad x \in [0, L], \\ u = 0 \text{ sur } \{0, L\}, \\ v = 0 \text{ sur } \{0, L\}, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$$\mathcal{D}(u, v, 0) = (h_1, h_2)$$

2 contrôles

D'après des résultats de TaT sien Li :

Proposition

Soient $k \geq 2$, $0 \leq a < b \leq L$, $T > 0$ tel que

$$T > 2(L - b) \max\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}\right), \quad T > 2a \max\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}\right). \quad (3.2)$$

Pour tout $0 < \delta < \min(T/2, (b - a)/2)$ tel que

$$\begin{aligned} T - 2\delta &> 2(L - b + 2\delta) \max\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}\right), \\ T - 2\delta &> 2(a + 2\delta) \max\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}\right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

le système est contrôlable pour des données compatibles $C^k \times C^{k-1}$, avec deux contrôles $h_1, h_2 \in C^{k-2}([0, T] \times [0, L])$ vérifiant

$$\text{supp } h_i \subset [\delta, T - \delta] \times [a + \delta, b - \delta], \quad i = 1, 2.$$

$$[\delta, T - \delta] \times [a + \delta, b - \delta] \subset [0, T] \times [a, b]$$

Résolution algébrique pour notre système?

Différentielle :

$$\mathcal{L}_{(u,v,h)}(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h}) = \begin{pmatrix} \square_{\nu_1} \tilde{u} - Df_1(u, v) \cdot (\tilde{u}, \tilde{v}) - \tilde{h} \\ \square_{\nu_2} \tilde{v} - Df_2(u, v) \cdot (\tilde{u}, \tilde{v}) \end{pmatrix}$$

Résolution algébrique pour notre système?

Différentielle :

$$\mathcal{L}_{(u,v,h)}(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h}) = \begin{pmatrix} \square_{\nu_1} \tilde{u} - Df_1(u, v) \cdot (\tilde{u}, \tilde{v}) - \tilde{h} \\ \square_{\nu_2} \tilde{v} - Df_2(u, v) \cdot (\tilde{u}, \tilde{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Une solution possible, à condition que $\frac{\partial f_2}{\partial u}(u, v) \neq 0$

$\left(\frac{\partial f_2}{\partial u}(0, 0) \neq 0 \right)$:

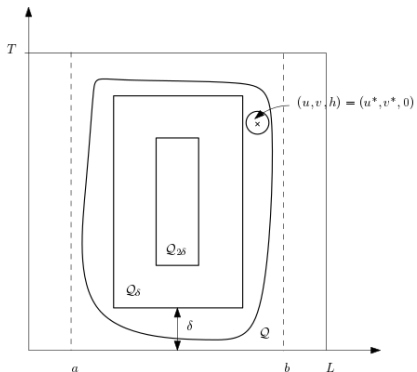
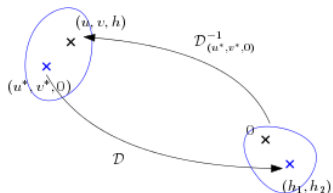
$$\tilde{v} = 0,$$

$$\tilde{u} = -\frac{h_2}{\frac{\partial f_2}{\partial u}(u, v)},$$

$$\tilde{h} = \square_{\nu_1} \tilde{u} - \frac{\partial f_1}{\partial u}(u, v) \tilde{u} - h_1.$$

- Inversion locale : (u^*, v^*) trajectoire avec deux contrôles (h_1, h_2) , **assez petits pour inverser**.
- On travaille sur les restrictions à $U(\text{supp}(h_1, h_2))$, et on définit

$$(u, v, h) = \mathcal{D}_{(u^*, v^*, 0)}^{-1}(-h_1, -h_2). \text{ (écriture centrée en } ((u^*, v^*, 0), (h_1, h_2))$$



Théorème

Soient $R > 0$, et $0 \leq a < b \leq L$, $T > 0$ tel que

$$T > 2(L - b) \max\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}\right), \quad T > 2a \max\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}\right). \quad (3.4)$$

Si

$$\frac{\partial f_2}{\partial u}(0, 0) \neq 0, \quad (3.5)$$

alors le système est localement contrôlable autour de 0 pour des données compatibles $C^{11} \times C^{10}$, avec des trajectoires et un contrôle $h \in C^6([0, T] \times [0, L])$ tels que

$$\text{supp } h \subset [0, T] \times [a, b]. \quad (3.6)$$

Sommaire

- 1 La méthode des contrôles fictifs
- 2 Premier cas : couplage non-dégénéré
- 3 Second cas : un exemple de couplage dégénéré**

Que se passe-t-il si $\frac{\partial f_2}{\partial u}(0, 0) = 0$?

Exemple :

$$\begin{cases} \square_{\nu_1} u = h, & x \in [0, L], \\ \square_{\nu_2} v = u^3, & x \in [0, L], \\ u = 0 & \text{on } \{0, L\}, \\ v = 0 & \text{on } \{0, L\}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Méthode du retour

Idée : aller chercher un système linéarisé plus sympathique (ie travailler autour d'une autre trajectoire).

Méthode du retour (Coron) : construire $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{h})$ solution de (4.1) tels que

$$3\bar{u}^2(t, x) = \frac{\partial f_2}{\partial u}(\bar{u}(t, x), \bar{v}(t, x)) \neq 0.$$

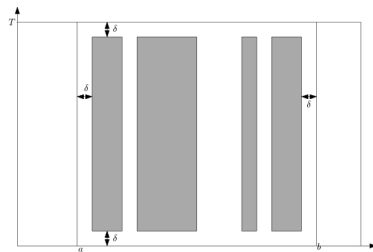
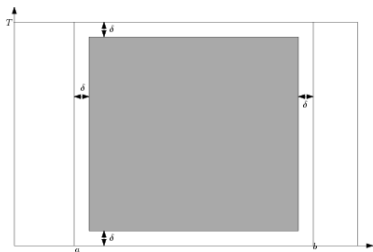
Pour quels (t, x) ?

- Réduction du nombre de contrôles : on corrige au voisinage de

$$\{(t, x) \in [0, T] \times [0, L], (h_1, h_2)(t, x) \neq (0, 0)\}.$$

- Doit vérifier une GCC pour garder la condition de temps "optimale"

$$T > 2(L - b) \max\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}\right), \quad T > 2a \max\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}\right)$$



Construction d'une trajectoire de retour

Le système a une structure en cascade :

$$\begin{cases} \square_{\nu_1} \bar{u} = \bar{h}, \\ \square_{\nu_2} \bar{v} = \bar{u}^3 \end{cases}$$

Commencer par la seconde équation : trouver $(\bar{u}, \bar{v}) \in C^\infty$ tels que

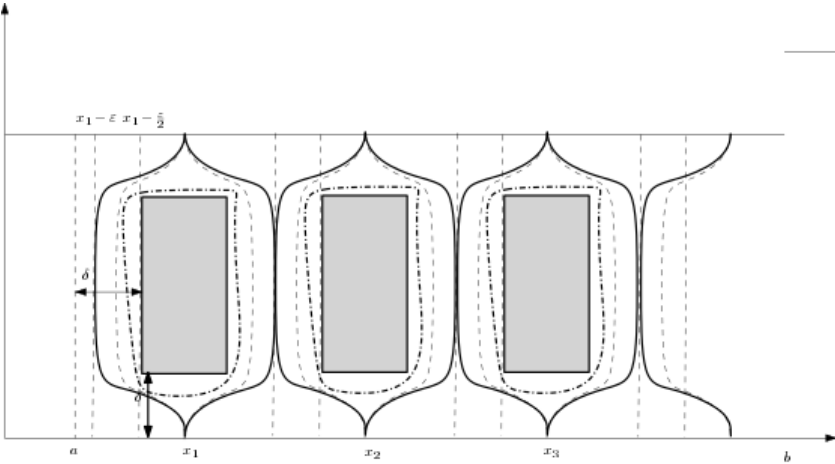
$$\square \bar{v} = \bar{u}^3, \quad \bar{u}(t, x) \neq 0 \text{ sur un certain domaine.}$$

Méthode de construction par perturbations : problème stationnaire

$$-\bar{v}'' = \bar{u}^3.$$

Méthode perturbative : $\text{supp } \bar{u}$ est petit. Mais on peut en prendre plein!

Méthode perturbative : $\text{supp } \bar{u}$ est petit. Mais on peut en prendre plein!



$U_i[\delta, T - \delta] \times [x_i - \xi, x_i + \xi]$

 Q_i

Autour de $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{h})$

2 contrôles : Système $\begin{cases} \square_{\nu_1} u = h_1 \\ \square_{\nu_2} v = 3\bar{u}^2 u + 3\bar{u} u^2 + u^3 + h_2 \end{cases}$
 Résultat de contrôle avec des contrôles à supports fins.

Autour de $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{h})$

2 contrôles : Système $\begin{cases} \square_{\nu_1} u = h_1 \\ \square_{\nu_2} v = 3\bar{u}^2 u + 3\bar{u} u^2 + u^3 + h_2 \end{cases}$

Résultat de contrôle avec des contrôles à supports fins.

1 contrôle : Correction autour de ce support fin, résolution algébrique

$$\tilde{v} = 0,$$

$$\tilde{u} = -\frac{h_2}{3\bar{u}^2},$$

$$\tilde{h} = \square_{\nu_1} \tilde{u} - h_1$$

→ inversion locale possible.

Autour de $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{h})$

2 contrôles : Système $\begin{cases} \square_{\nu_1} u = h_1 \\ \square_{\nu_2} v = 3\bar{u}^2 u + 3\bar{u}u^2 + u^3 + h_2 \end{cases}$

Résultat de contrôle avec des contrôles à supports fins.

1 contrôle : Correction autour de ce support fin, résolution algébrique

$$\tilde{v} = 0,$$

$$\tilde{u} = -\frac{h_2}{3\bar{u}^2},$$

$$\tilde{h} = \square_{\nu_1} \tilde{u} - h_1$$

→ inversion locale possible.

Résultat global par homogénéité.

Théorème

Soient $R > 0$, et $0 \leq a < b \leq L$, $T > 0$ tel que

$$T > 2(L - b) \max\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}\right), \quad T > 2a \max\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}\right). \quad (4.2)$$

le système cubique est globalement contrôlable autour de 0 pour des données compatibles $C^{11} \times C^{10}$, avec des trajectoires (u, v) et un contrôle $h \in C^6([0, T] \times [0, L])$ tels que

$$\text{supp } h \subset [0, T] \times [a, b], \quad (4.3)$$

$$\|h\|_{C^6} \leq C \left(\|(u_0, u_1, u_0^f, u_1^f)\|_{(C^{11} \times C^{10})^2} + \|(v_0, v_1, v_0^f, v_1^f)\|_{(C^{11} \times C^{10})^2}^{\frac{1}{3}} \right). \quad (4.4)$$

Questions?